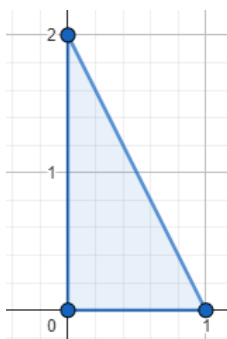


3. cvičení - řešení

Příklad 1: vzorové řešení je zde (příklad 1): https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/2223ZS_Kal2/08res.pdf

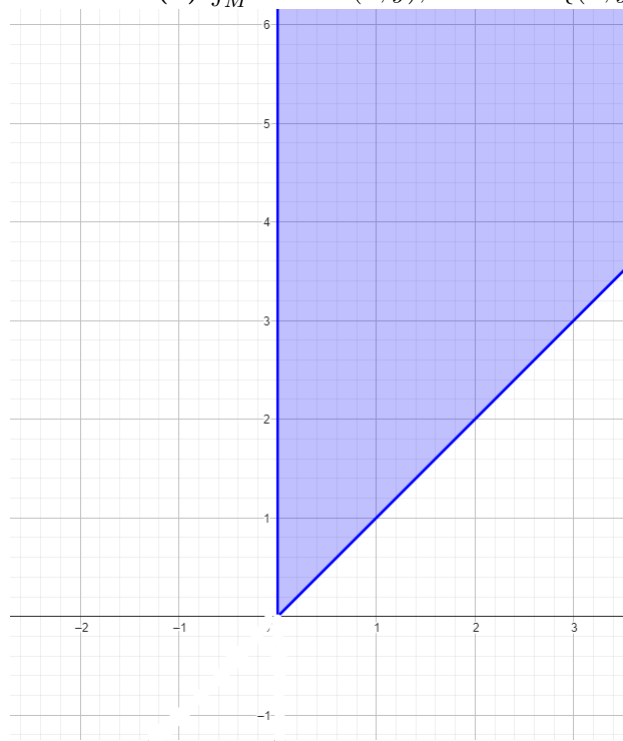
Příklad 2 (a) $\int_M x^2 + y^2 \, d(x, y)$, kde M je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$
Množina M :



Vidíme, že bod množiny M lze vyjádřit jako $[x, y]$, kde $x \in [0, 1]$ a $y \in [0, 2 - 2x]$.

$$\begin{aligned} \int_M x^2 + y^2 \, d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} x^2 + y^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \\ &= \int_0^1 x^2(2-2x) + \frac{(2-2x)^3}{3} - 0 \, dx = \int_0^1 2x^2 - 2x^3 + \frac{8}{3} - 8x + 8x^2 - \frac{8}{3}x^3 \, dx = \\ &= \int_0^1 10x^2 - \frac{14}{3}x^3 - 8x + \frac{8}{3} \, dx = \left[\frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{6}x^4 - 4x^2 + \frac{8}{3}x \right]_{x=0}^{x=1} = \\ &= \frac{20 - 7 - 24 + 16}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Příklad 2 (b) $\int_M e^{-x-y} \, d(x, y)$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$



Zřejmě $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \infty), y \in [x, \infty)\}$.

$$\begin{aligned}\int_M e^{-x-y} d(x, y) &= \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-x-y} dy dx = \int_0^\infty e^{-x} \int_x^\infty e^{-y} dy dx = \int_0^\infty e^{-x} [-e^{-y}]_{y=x}^{y=\infty} = \\ &= \int_0^\infty e^{-x} (0 - (-e^{-x})) dx = \int_0^\infty e^{-2x} dx = \\ &= |z = -2x, dz = -2 dx, 0 \mapsto 0, \infty \mapsto -\infty| = - \int_0^{-\infty} \frac{1}{2} e^z dz = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^z dz = \\ &= \left[\frac{1}{2} e^z = \frac{1}{2} \right]_{z=-\infty}^{z=0}\end{aligned}$$

Příklad 2 (c) $\int_M x(y+1) d(x, y)$, kde M je jednotkový kruh

Platí $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]\}$.

$$\begin{aligned}\int_M x(y+1) dx &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x(y+1) dy dx = \int_{-1}^1 x \left[\frac{y^2}{2} + y \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} + \sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} + \sqrt{1-x^2} dx = \\ &= \int_{-1}^1 2x\sqrt{1-x^2} dx = \left| z = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}, \frac{-4z}{(z^2+1)^2}, -1 \mapsto \infty, 1 \mapsto 0 \right| = \\ &= \int_0^\infty \frac{4z}{(z^2+1)^2} 2\sqrt{\frac{4z^2}{(z^2+1)^2} \frac{1-z^2}{z^2+1}} dz \stackrel{\text{par. zlomky}}{=} 0\end{aligned}$$

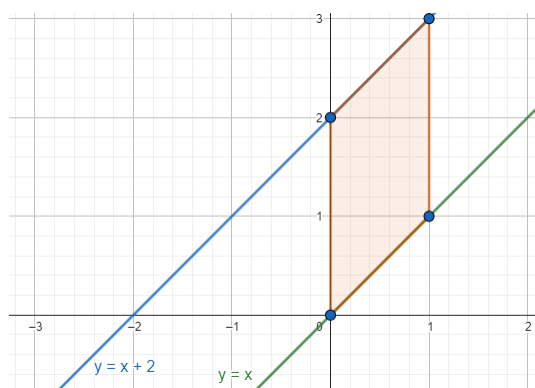
Příklad 2 (e) $\int_M xy d(x, y)$, kde M je čtvrtina jednotkového kruhu ležící v prvním kvadrantu

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, \sqrt{1-x^2}]\}$

$$\begin{aligned}\int_M xy d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy dy dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} (1-x^2) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Příklad 2 (g) $\int_M 2x^2y d(x, y)$, kde M je čtyřúhelník s vrcholy $(0, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 3)$

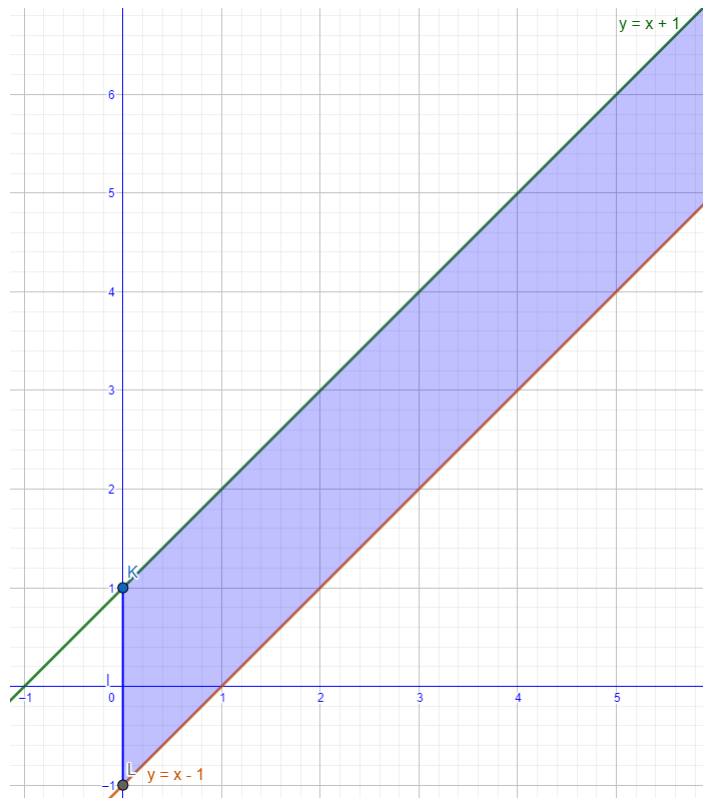
Množina M :



Vidíme: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [x, x + 2]\}$

$$\begin{aligned} \int_M 2x^2 y \, d(x, y) &= \int_0^1 \int_x^{x+2} 2x^2 y \, dy \, dx = \int_0^1 x^2 \left[y^2 \right]_{y=x}^{y=x+2} dx = \int_0^1 x^2 (x^2 + 4x + 4 - x^2) dx = \\ &= \int_0^1 4x^3 + 4x^2 \, dx = \left[x^4 + \frac{4x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Příklad 2 (h) $\int_M y e^{-x} \, d(x, y)$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, |x - y| \leq 1\}$
Množina M :



$$\begin{aligned} \int_M y e^{-x} \, dx &= \int_0^\infty \int_{x-1}^{x+1} y e^{-x} \, dy \, dx = \int_0^\infty e^{-x} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x-1}^{y=x+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x} (x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1) \, dx = \int_0^\infty 2x e^{-x} \, dx \stackrel{\text{PP}}{=} \left| u = 2x, \, v' = e^{-x} \right| = \\ &= [-2x e^{-x}]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty (-e^{-x}) 2 \, dx = 0 + 2 [-e^{-x}]_{x=0}^{x=\infty} = 2 \end{aligned}$$

Příklad 3 (a) $\int_M x^2 + y^2 \, d(x, y)$, kde $M = [x^2 + (y + 2)^2 \leq 4]$
 $M = \left[y \in [-2, 2], x \in \left[-\sqrt{4 - (y + 2)^2}, \sqrt{4 - (y + 2)^2} \right] \right]$

Příklad 3 (b) $\int_M h - 2x - 3y \, d(x, y)$, kde $M = [x^2 + y^2 \leq R^2]$ a $h, R \in \mathbb{R}$
 $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-R, R], y \in [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]\}$

Příklad 3 (c) $\int_M (x + y) \cos(\pi(x - y)) \, d(x, y)$, kde $M = [x + y \geq 0, x \leq 1, 1 + y \leq x \leq 2 + y]$

$$\begin{aligned}
y &\geq -x \\
x &\leq 1 \\
y &\leq x - 1 \\
y &\geq x - 2
\end{aligned}$$

Poslední dvě rovnice dávají $x - 2 \leq y \leq x - 1$. Dále je na y kladena podmínka $y \geq -x$. Nyní je otázkou, kde je na ose $-x$.

Mohou nastat dva případy, ve kterých může y splnit všechny podmínky a to: $-x < x - 2 < x - 1$ a $x - 2 \leq -x \leq x - 1$. Rozeberme si je.

- $-x < x - 2 < x - 1$, pak platí, že $y \in [x - 2, x - 1]$. Taková situace nastane pro $x > 1$, jak naznačuje výpočet níže.

$$\begin{aligned}
-x &< x - 2 \\
2 &< 2x \\
x &> 1
\end{aligned}$$

V definici množiny M však máme, že $x \leq 1$. Tedy v rámci množiny M nenastává situace $-x < x - 2$.

- $x - 2 \leq -x \leq x - 1$, pak platí, že $y \in [-x, x - 1]$. Tato situace nastává pro $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

$$\begin{aligned}
x - 2 \leq -x &\quad || \quad -x \leq x - 1 \\
2x \leq 2 &\quad || \quad 1 \leq 2x \\
x \leq 1 &\quad || \quad x \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Celkově dostáváme, že $\pi_1(M) = [\frac{1}{2}, 1]$ a pro $x \in \pi_1(M)$ platí, že $M_x = [-x, x - 1]$

Pro ukázkou určíme $\pi_2(M)$ a M^y . Tedy zkusme si vyjádřit x v závislosti na y .

Máme $x \in [1 + y, 2 + y] \cap (-\infty, 1] \cap [-y, \infty)$. Nyní je třeba zjistit, pro která y je daná množina neprázdná. Věnujme se nejdříve množině $[1 + y, 2 + y] \cap [-y, \infty)$, pozici 1 vzhledem k y budeme řešit později. Existují dvě situace, ve kterých je $[1 + y, 2 + y] \cap [-y, \infty) \neq \emptyset$. Podívejme se na ně:

- $-y \leq 1 + y < 2 + y$ - pak $M^y = [1 + y, 2 + y] \cap (-\infty, 1]$.

$$\begin{aligned}
-y &\leq 1 + y \\
-1 &\leq 2y \\
y &\geq -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Pro $y \geq -\frac{1}{2}$ platí: $1 + y \geq \frac{1}{2}, 2 + y \geq \frac{3}{2}$. Nyní vidíme, že $M^y \neq \emptyset$ pouze pro $1 + y \leq 1$, tedy pro $y \leq 0$. Dostáváme tedy, že pro $y \in [-\frac{1}{2}, 0]$ je $M^y = [1 + y, 1]$ a pro $y > 0$ je M^y prázdná.

- $1 + y < -y \leq 2 + y$. Pak $M^y = [-y, 2 + y] \cap (-\infty, 1]$

$$\begin{aligned}
1 + y < -y &\quad || \quad -y \leq 2 + y \\
2y < -1 &\quad || \quad -2 \leq 2y \\
y < -\frac{1}{2} &\quad || \quad y \geq -1
\end{aligned}$$

Daná situace tedy nastává pro $y \in [-1, -\frac{1}{2})$. Pak $-y \in (\frac{1}{2}, 1]$ a $2+y \in [1, \frac{5}{2})$. Z toho vidíme, že $M^y = [-y, 1]$.

Celkově dostáváme: $\pi_2(M) = [-1, 0]$ a pro $y \in [-1, -\frac{1}{2})$ je $M^y = [-y, 1]$ a pro $y \in [-\frac{1}{2}, 0]$ je $M^y = [1+y, 1]$.

Pak daný integrál počítáme takto:

$$\int_M f(x, y) \, d(x, y) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \int_{-y}^1 f(x, y) \, dx \, dy + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_{1+y}^1 f(x, y) \, dx \, dy.$$

Příklad 4: vzorové řešení zde (příklad 2): https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/2223ZS_Ka12/08res.pdf